

Algorytm low

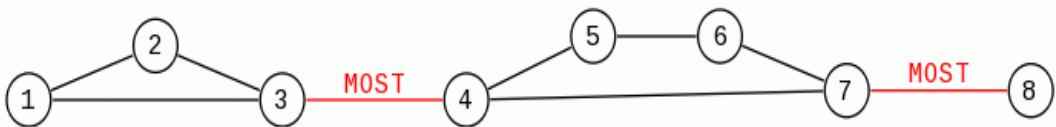
Witam , dziś chciałbym zaprezentować Wam pewien algorytm zwany low. Choć po głębszym zastanowieniu można by to nazwać funkcją, gdyż jest to tablica wartości, z której możemy odczytać pewne własności grafu.

W tym artykule będę wymagał podstawowej wiedzy z teorii grafów tzn. dfs i numeracja preorder

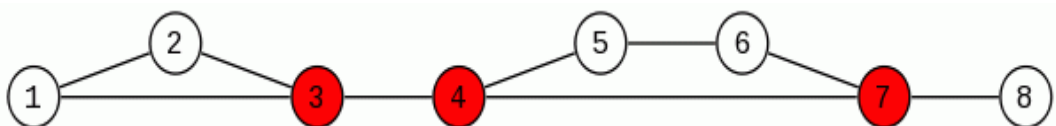
1. Do czego służy LOW ?
2. Jak działa ?
3. Mini dowód + zasada działania
4. Mosty i punkty artykulacji

1) Funkcja low pozwala nam na jednoznaczne określenie czy krawędź jest mostem albo czy wierzchołek jest punktem artykulacji, wartość funkcji LOW jest to najwcześniejszy wierzchołek w numeracji PreOrder do jakiego możemy dotrzeć pod pewnymi warunkami.

- Most - jest to taka krawędź po której usunięciu graf, SSS lub spójna składowa ulega rozpójnieniu.



-Punkt artykulacji – analogicznie jest to wierzchołek który rozpójnia nam wyżej wymienione rzeczy.



2) Funkcja low jest to tablica którą wypełniamy w następujący sposób:

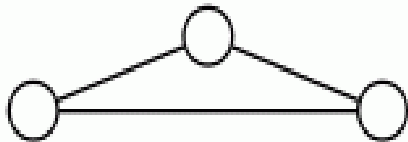
- W ramach dfs dla wierzchołka przypisujemy $low[v] = PreOrder[v]$, gdzie $PreOrder[v]$ jest równy numerowi preorder w dfsie

- Dla każdego już odwiedzonego syna (oprócz ojca) $low[v]=\min(low[v],PreOrder[u])$ gdzie 'u' to ten odwiedzony już wierzchołek z którym mamy jakieś połączenie
- Dla każdego nieodwiedzonego puszczamy DFS'a i $low[v]=\min(low[v],low[u])$

3) No dobrze, ale część z was może się zapytać „czemu to działa” i w ogóle jak to działa ?!

Wiec zacznijmy od początku , funkcja dfs sprowadzi nam graf do postaci drzewa. Zakładając że mamy drzewo każda krawędź to most i każdy wierzchołek (poza korzeniem i liśćmi) jest to punkt artykulacji. Jednak my mamy jeszcze dodatkowe ścieżki i na potrzeby przykładu oznaczymy je na niebiesko.

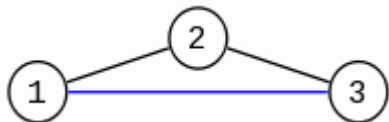
Rozpatrzmy następujący graf :



Nasz dfs sprowadzi nam (łącznie z numeracją) do takiej postaci :



Jednak my wiemy iż posiadamy jeszcze jedną krawędź :



Możemy poruszać się po drzewie w następujący sposób , czarnymi krawędziami możemy cały czas schodzić , jednak one prowadzą nas w dół , co zwiększa nam potencjalnie LOW a my chcemy je zminimalizować , niebieska krawędź jest to taka krawędź która prowadzi do wierzchołka o wcześniejszym numerze PreOrder.

A więc kiedy opłaca nam się schodzić w dół czarną krawędzią ? A no kiedy któryś z synów wierzchołka posiada krawędź do wierzchołka wcześniejszego niż 'v'.

I my dowiadujemy się tego w ramach dfs'a , ponieważ liczenie low odbywa się po powrocie z konkretnego poddrzewa.

4) Most – występuje wtedy jeżeli w danym wierzchołku występuje następująca równość $LOW[v]=PreOrder[v]$, co jest równoznaczne z tym iż z całego naszego poddrzewa nie da się dotrzeć nigdzie wyżej czyli krawędź, którą dotarliśmy do tego wierzchołka jest jedyną która prowadzi do danego poddrzewa

Punkty artykulacji – występuje wtedy kiedy zachodzi równość $LOW[v] \geq PreOrder[w]$, gdzie w to syn naszego v . Jest tak ponieważ przez wierzchołek v wierzchołek w łączy się z resztą poddrzewa a wiemy to właśnie stąd że $low[v]$ jest takie a nie inne, czyli nie ma jakiej opcji co by wejść do w poddrzewa wierzchołka w i wyjść z niego inną ścieżką niż v